# Esperimento di Leclerc: Discussione

Marco Bellomo

July 1, 2024

# Contents

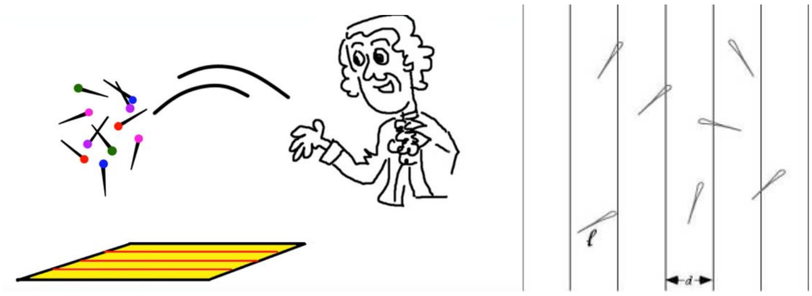

**Figure 1**

# Introduzione

Non so bene in quanti avete fatto l'esperimento, però voglio discutere in questo piccolo documento, oltre che le soluzioni del problema, le potenzialità educative di un test sperimentale di questo tipo. Un esercizio come questo, apparentemente sciocco e di poco conto, apre la strada per la trattazione di molti concetti di statistica (alcuni dei quali, a mio avviso, piuttosto sottili), ma anche ad una serie di problemi applicativi e più manuali della stessa, come quello delle simulazioni numeriche. Uno dei principali problemi che abbiamo riscontrato tra i ragazzi: la completa dissociazione tra fenomeno fisico e formula. Questo, insieme ad una miriade di altri esempi, è un modo, a nostro avviso, utile per far avvicinare i ragazzi alla probabilità e alla statistica, senza farli perdere in quel mare di formule che, troppo spesso (anche nei libri di testo), vengono presentate senza un minimo di contestualizzazione e di riscontro con casi concreti. Per questo ora mi piacerebbe partire dall'esercizio di Leclerc mostrandone i risultati, commentandoli, e illustrandovi come, un esercizio così semplice, potrebbe essere la base per un intero corso universitario di statistica! Non preoccupatevi, non faremo nulla del genere, ma ci piacerebbe che questo fosse di esempio per mostrare un diverso "approccio" ad alcuni concetti come quello di "errore", "varianza", "estimatori", ecc, che vengono presentati già nel programma delle superiori.

# 1 Strumenti matematici utili

La domanda con cui dobbiamo partire e su cui si basa l'intero test è la seguente:

> Qual è la probabilità che un ago di lunghezza $l$ intersechi una delle linee parallele separate da una distanza $d$?

Perdonateci se ci sarà qualche formula apparentemente complessa, ma cercheremo di rendere una spiegazione chiara e pratica di ognuna. Come prima cosa consideriamo un ago che interseca una delle linee in questione. Possiamo facilmente intuire che l'angolo che questo forma con la linea oscilli nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ per questioni di simmetria. Precisiamo poi che le righe della griglia in cui è diviso il foglio siano orizzontali. Con una configurazione di questo tipo, un ago che interseca la linea, forma un angolo $\theta$ con essa; la sua componente trasversa sarà $l \sin\theta$. A questo punto, visto che voglio fare una trattazione generale, non diamo a priori vincoli sul rapporto tra $l$ e $d$. In questo caso più generale devo dividere la mia trattazione in:

- "ago corto", se vale cioè $l \leq d$;
- "ago lungo", se vale cioè $l \geq d$;

Nel caso di "ago corto", la probabilità che l'ago intersechi la linea, sarà legata al rapporto tra la distanza delle linee e la componente trasversa dell'ago. Intuitivamente possiamo intuire questa cosa in modo molto naive pensando al fatto che, mantenendo costante la lunghezza degli aghi, la probabilità di intersezione sarà tanto maggiore quanto minore sarà la distanza tra queste. Tale probabilità è

$$p(d, l, \theta) = \frac{l \sin\theta}{d} \tag{1}$$

che, tra l'altro, è sempre compresa tra $[0, 1]$ in quanto vale il vincolo $l \leq d$. Questa relazione vale però per un singolo angolo $\theta$ dato. Ottengo la relazione che cerco, mediando tale quantità su tutti i possibili angoli, che abbiamo precedentemente detto essere compresi tra $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} p(d, l) &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(d, l, \theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d} \cdot \Big[ -\cos\theta \Big]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d} \end{aligned} \tag{2}$$

Nel caso, invece, di "ago lungo" ($l \geq d$) abbiamo, è vero, la stessa probabilità, ma solo se vale il vincolo $\frac{l \sin\theta}{d} \leq 1$, cioè per angoli compresi tra $[0, \sin^{-1}(l/d)]$, poichè per angoli maggiori l'ago intersecherà sicuramente la linea. Dunque, come prima, dato un certo angolo, la probabilità di intersezione la definisco come

$$p(d, l, \theta) = \begin{cases} \frac{l \sin\theta}{d} & \theta \in \Big[0, \sin^{-1}(\frac{l}{d})\Big] \\ 1 & \theta \in \Big[\sin^{-1}(\frac{l}{d}), \frac{\pi}{2}\Big] \end{cases} \tag{3}$$

E la medio su tutti i possibili angoli

$$\begin{aligned} p(d, l) &= \frac{2}{\pi} \Big[ \int_0^{\sin^{-1}(\frac{l}{d})} \frac{l \sin\theta}{d} d\theta + \int_{\sin^{-1}(\frac{l}{d})}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \Big] = \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[ \frac{l}{d} - \sqrt{\Big(\frac{l}{d}\Big)^2 - 1} + \sec^{-1}\Big(\frac{l}{d}\Big) \Big] \end{aligned} \tag{4}$$

In conclusione, la probabilità che un ago intersechi la linea è:

$$p(d, l, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d} & l \leq d \\ \frac{2}{\pi} \Big[ \frac{l}{d} - \sqrt{\Big(\frac{l}{d}\Big)^2 - 1} + \sec^{-1}\Big(\frac{l}{d}\Big) \Big] & l > d \end{cases} \tag{5}$$

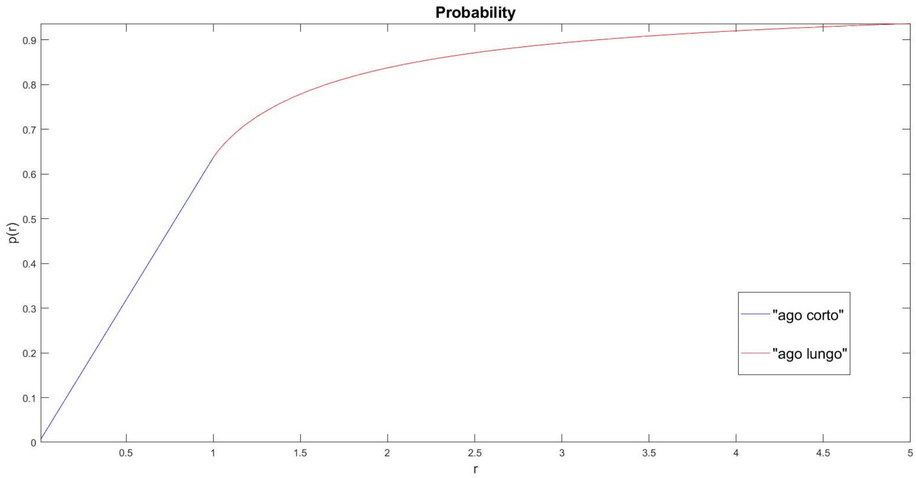


**Figure 2**

Se definisco la variabile

$$\frac{l}{d} = r$$

Otteniamo il caso di "ago corto" per $r \leq 1$ e il caso di "ago lungo" per $r > 1$. Abbiamo allora

$$p(d,l,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot r & r \leq 1 \\ \frac{2}{\pi}[r - \sqrt{r^2-1} + \sec^{-1} r] & r > 1 \end{cases} \tag{6}$$

E graficamente questo si traduce nella Fig.2.

# 2 Discussione dell'esercizio

Se riprendiamo la funzione di probabilità del caso di "ago corto", ci rendiamo conto (osservando anche il grafico in figura 2) che questa dipende in modo lineare dalla variabile $r = l/d$. Questo si traduce, dal punto di vista grafico, con una retta di coefficiente angolare che dipende da $\pi$. Dunque l'idea è proprio quella di utilizzare questa relazione per ottenere il valore di $\pi$ *con una certa precisione*. Per farlo, dobbiamo rifarci alla fase 4 dell'esercizio. Ripetere l'esperienza con diversi valori di $r = l/d$ comporta avere più dati che devono (oppure no), essere punti della retta

$$p(d,l) = \frac{2}{\pi} * r$$

in cui però i valori di $p$ sono proprio dati dal rapporto $(nk)/N$. In sostanza, allora, avendo il valore di $p$ (perchè misurato) e il valore di $r$ (perchè noto), ho diverse coppie $(r,p)$ che devono essere tutti punti di un'unica retta di coefficiente angolare $2/\pi$. Invertendo la relazione, otteniamo, dunque

$$\pi = \frac{2}{p} * r$$

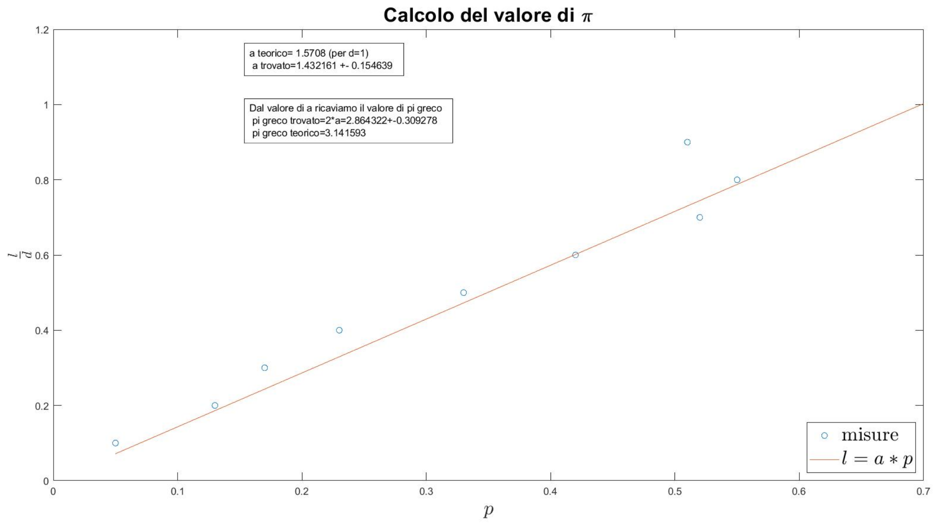


**Figure 3:** Grafico per $N_{aghi} = 100$

Risulta interessante vedere (come accennato nella fase 3), come aumenta la *precisione* del valore di $\pi$ ottenuto, aumentando il numero di lanci (e dunque i dati a disposizione). Di seguito vengono proposti grafici come quello richiesto, ottenuti *simulando* 100 lanci per ogni valore di $r = k * 0.1$ con $k$ intero e tale che $0.1 \leq r \leq 1$. Quello che sembra piuttosto evidente è che, all'aumentare dei dati a disposizione, otteniamo dei grafici "più belli". Cosa si intende con "più belli"? In pratica vediamo che, nella figura 3 parecchi dei punti ottenuti non sono esattamente sulla retta, ma man mano che faccio tendere $N_{aghi} \to \infty$ la retta ottenuta tende ad intersecare sempre più punti. Dal punto di vista *grafico*, già la figura 6 sembrerebbe soddisfare le nostre aspettative, ma se andiamo a ricavare il valore del $\pi$ dal coefficiente della retta, otteniamo solo 2 cifre significative corrette.
Questo problema di approssimazione è tipico dei metodi di calcolo approssimati (di cui questa esperienza è un esempio). Quindi, potremmo chiederci se questo è un metodo più o meno conveniente rispetto ad altri. Questa si traduce nella seguente domanda:

> Quanti aghi bisogna lanciare per ottenere un valore di $\pi$ corretto alla $m$-esima cifra decimale?

Per rispondere a tale domanda, supponendo $l = d$ per comodità, basta pensare al fatto che $p = (nk)/N \to 2/\pi$. Di conseguenza, se vogliamo una precisione alla $m$-esima cifra decimale, sto praticamente chiedendo che valga la relazione

$$\left|\frac{2}{\pi} - \frac{nk}{N}\right| < \epsilon \tag{7}$$

dove $\epsilon$ altro non è che il rapporto tra *varianza* della distribuzione (che in questo caso è una *binomiale*) e il valore atteso (la media). Quindi

$$\left|\frac{2}{\pi} - \frac{nk}{N}\right| \sim \sqrt{\frac{Np(1-p)}{N^2p^2}} \sim \sqrt{\frac{1}{N}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{N}\frac{\pi - 2}{2}} \sim \sqrt{\frac{1}{N}} \tag{8}$$

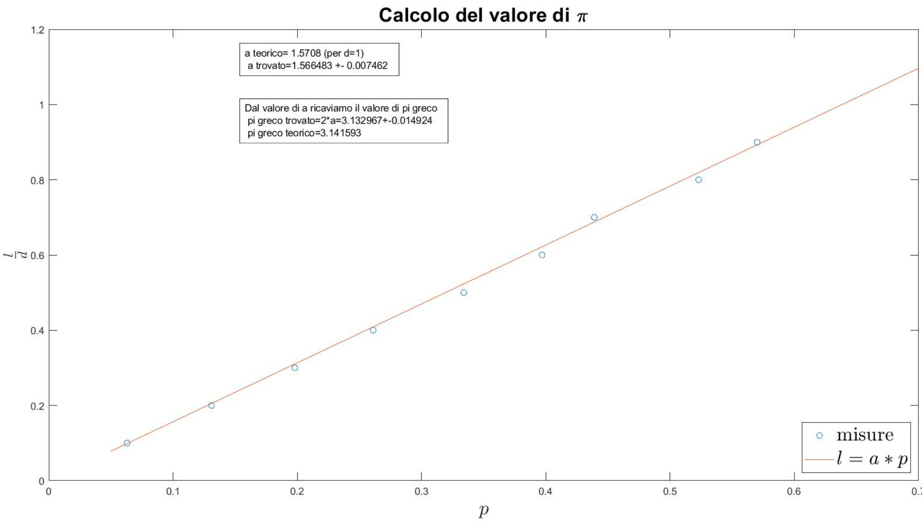


**Figure 4:** Grafico per $N_{aghi} = 1000$

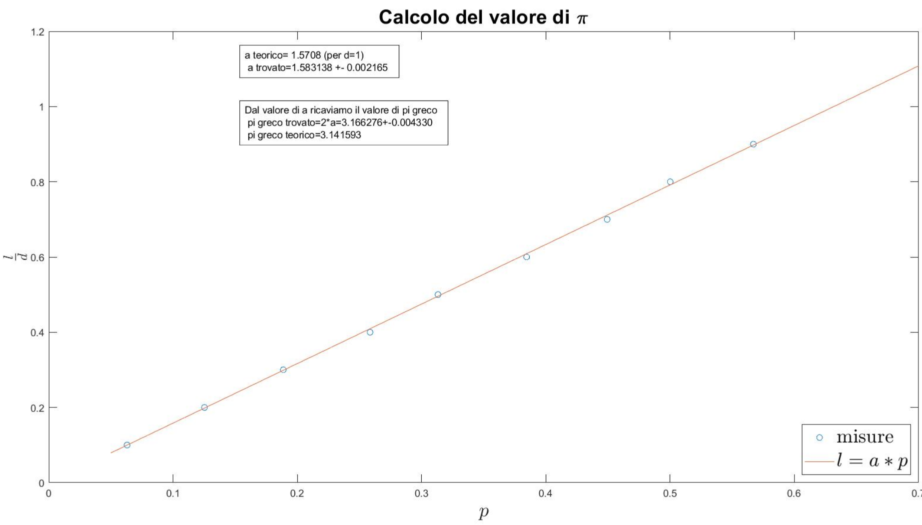


**Figure 5:** Grafico per $N_{aghi} = 10000$

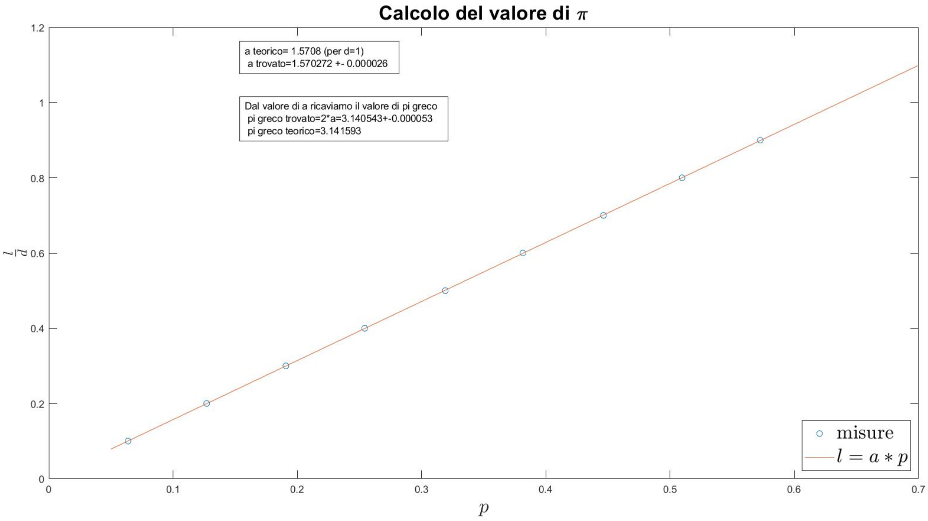


**Figure 6:** Grafico per $N_{aghi} = 1000000$

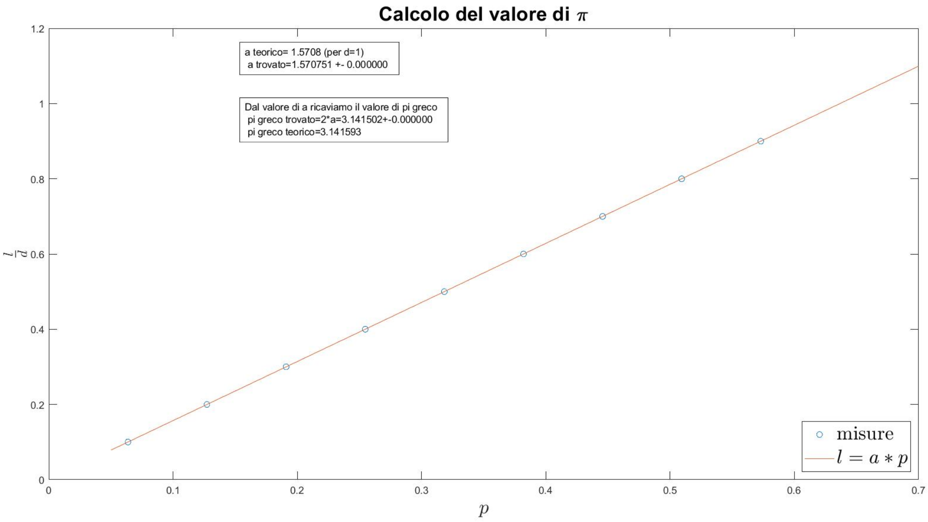


**Figure 7:** Grafico per $N_{aghi} = 100000000$

In pratica, per raggiungere una precisione di $10^{-4}$, devo fare un numero di lanci dell'ordine di $10^8$. E il grafico 7 conferma quanto trovato.

# 3 Possibili collegamenti

Per riassumere, oltre che essere una semplice spiegazione dell'esercizio, con questo piccolo scritto volevamo evidenziare alcuni tra i possibili argomenti che possono essere introdotti utilizzando un esercizio come questo:

- concetti fondamentali di probabilità;
- introduzione alle distribuzioni;
- cos'è un fit;
- introduzione al calcolo approssimato e alle simulazioni;
- ...

L'idea, come sempre, è cercare di mantenere un contatto tra teoria e "pratica", cioè cercare di presentare ogni argomento (seppure apparentemente astratto come può essere la probabilità o la statistica), in modo che ci sia sempre il contatto con applicazioni pratiche e, possibilmente multidisciplinari.

# 4 Esercizio alternativo

Un altro esercizio molto simile a questo tipo di ragionamento, infatti lo si può fare utilizzando freccette e il classico bersaglio circolare: potete infatti divertirvi a spiegare come mai le diverse zone del bersaglio hanno punteggi diversi. A cosa corrisponde un punteggio più alto? Come si giustifica utilizzando le probabilità?

# References

[1] Alberto Rotondi, Paolo Pedroni, Antonio Pievatolo, *Probabilità, Statistica e Simulazione*, Springer-Verlag 2012.

[2] Glen Cowan, *Statistical Data Analysis*, Oxford Science Publications, 1998.

[3] D.S.Silvia, *Data Analysis*, Oxford Science Publications, 2006.