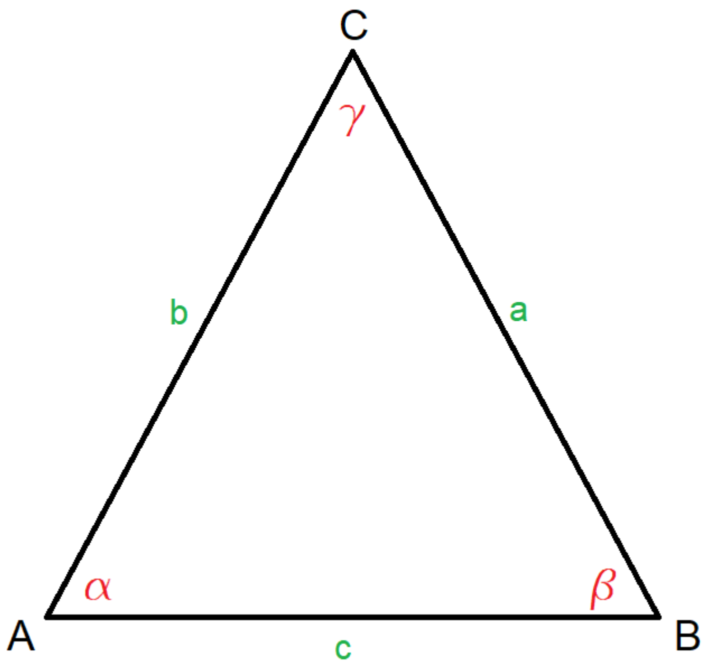
I teoremi del seno e del coseno sono delle relazioni geometriche utili per determinare la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli in un triangolo.

Teorema del seno



Consideriamo un triangolo qualsiasi dove abbiamo:

- a, b e c che rappresentano la lunghezza dei lati
- α, β e γ che rappresentano gli angoli opposti alle lunghezze a, b e c

Definizione: in un triangolo qualsiasi il rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante per tutti e tre i lati.

Esaminiamo meglio la definizione, se noi prendiamo il rapporto tra la lunghezza b e il seno dell'angolo opposto β otterremo un valore che possiamo definire con K (costante) un valore che non cambia, analogamente facendo il rapporto tra la lunghezza a e il seno dell'angolo opposto α otterremo lo stesso valore della costante K.

Quindi potremmo scrivere che:

- $$\frac{a}{\text{seno}\,\alpha} = K$$

- $$\frac{b}{\text{seno } \beta} = K$$
- $$\frac{c}{\text{seno } \gamma} = K$$

dove C avrà lo stesso valore in tutti e tre i casi, di conseguenza si potrebbe affermare che il rapporto tra la lunghezza a e il seno dell'angolo opposto α sarà uguale al rapporto tra la lunghezza b e il seno dell'angolo opposto β come sarà uguale anche al rapporto tra la lunghezza c e il seno dell'angolo opposto γ. di conseguenza possiamo tranquillamente scrivere:

- $$\frac{a}{\text{seno } \alpha} = \frac{b}{\text{seno } \beta} = \frac{c}{\text{seno } \gamma}$$

esempio

consideriamo di avere i seguenti dati della figura precedentemente esaminata: $\gamma = 50°$, $\beta = 60°$ ed infine a= 10 cm

per poter applicare il teorema dei seni, è necessario trovare l'incognita per poter svolgere l'esempio, di conseguenza si andrà a ricavare α che non è altro che la differenza tra la somma totale degli angoli di un triangolo e i suoi rispettivi due angoli a noi noti.

α = 180 -γ -β = 180°–50°–60° = 70°

ora conosciamo i dati necessari per poter svolgere il teorema dei seni

conosciamo tutti gli angolo e una lunghezza, di conseguenza si andrà a ricavare una delle due incognite mancanti, b e c

- $$\frac{a}{\text{seno } \alpha} = \frac{b}{\text{seno } \beta}$$

Si andrà ad isolare l'incognita da trovare, portando tutti i valori conosciti nell'altra parte (se è al denominatore, passerà al numeratore moltiplicando il valore esistente)

- $$\frac{a \cdot \text{seno } \beta}{\text{seno } \alpha} = b$$

Sostituendo con i valori numerici si otterrà:

- b= 9,216 cm

NB: ho tenuto 3 cifre significative dopo la virgola per rendere il risultato finale più attendibile possibile

Successivamente si andrà a trovare l'ultima incognita c applicando la stessa logica

- $$\frac{a}{\text{seno}\,\alpha} = \frac{c}{\text{seno}\,\gamma}$$

Isolo l'incognita con la stessa procedura applicata precedentemente

- $$\frac{a \cdot \text{seno}\,\gamma}{\text{seno}\,\alpha} = c$$

Sostituendo con i valori numerici si otterrà:

C= 8,152 cm

Dopo aver ottenuto l'ultima incognita si andrà a verifica i tre rapporti delle lunghezze e il seno dei loro rispettivi angoli opposti:

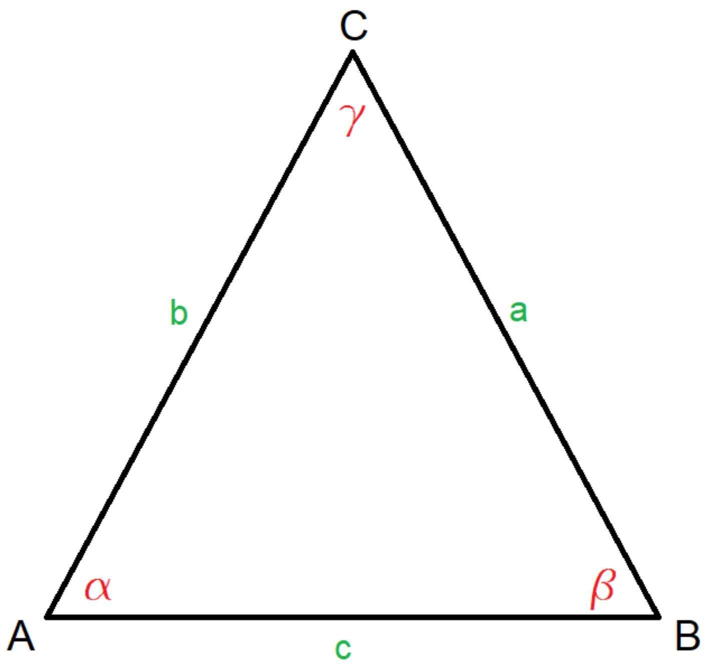
- $$\frac{a}{\text{seno}\,\alpha} = K$$
- K= 10,64
- $$\frac{b}{\text{seno}\,\beta} = K$$
- K= 10,64

- $$\frac{c}{\text{seno}\ \gamma} = K$$

- K=10,64

Conclusione: La costante K come da risultato si ripete in tutti e tre i rapporti, a dimostrazione che la definizione è corretta.

Teorema del coseno



Consideriamo un triangolo qualsiasi dove abbiamo:

- a, b e c che rappresentano la lunghezza dei lati
- α, β e γ che rappresentano gli angoli opposti alle lunghezze a, b e c

definizione: in un triangolo qualsiasi, il quadrato della lunghezza di uno dei tre lati è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati, diminuito del doppio del prodotto tra le lunghezze dei due lato e del coseno dell'angolo compreso dei medesimi.

Esaminando meglio tale definizione si può scrivere che:

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

per quanto riguarda il triangolo rettangolo quando si andrà a determinare l’ipotenusa, il coseno dell’angolo retto (90°) darà come risultato 0 e di conseguenza la formula si riduce a :

$$C^2 = a^2 + b^2.$$

Esempio:

se vogliamo determinare la lunghezza c ci basterà svolgere il teorema tenendo conto che c è al quadrato e di conseguenza al risultato finale basterà metterlo sotto la radice quadrata

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

Prendendo sempre i valori precedenti applicati nel teorema dei seni, proviamo a svolgere il problema:

C= 8,152 (come valore è uscito lo stesso come lo è stato per il teorema dei seni)

Proviamo invece a calcolare invece angolo γ che sarà dato alla formula inversa, successivamente dopo aver trovato il coseno di γ basterà semplicemente fare un arc coseno per trovare il valore effettivo. Ma vediamo la formula nel complesso.

$$\gamma = \arccos \frac{(b^2 + a^2 - C^2)}{2 \cdot a \cdot b}$$

Sviluppando con i numeri si ottiene γ= 50° ossia lo stesso valore con il teorema dei seni